L'Actualité économique

Mesure de la productivité : la méthode de Divisia
The measurement of productivity: The method of Divisia

Pierre Ouellette et Pierre Lasserre

Volume 61, numéro 4, décembre 1985

URI : https://id.erudit.org/iderudit/601350ar
DOI : https://doi.org/10.7202/601350ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

HEC Montréal

ISSN

0001-771X (imprimé)
1710-3991 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Ouellette, P. & Lasserre, P. (1985). Mesure de la productivité : la méthode de Divisia. *L'Actualité économique*, *61*(4), 507–526. https://doi.org/10.7202/601350ar

Résumé de l'article

Cet article constitue un survol de la littérature portant sur la mesure du progrès technique par la méthode de Divisia. Dans un premier temps, la méthode est exposée en posant a priori certaines hypothèses simplificatrices. Dans un deuxième temps, ces hypothèses sont mises de côté de façon à englober le cas des firmes en présence de rendements non unitaires, de facteurs quasi fixes et en l'absence de concurrence parfaite. Le tout est suivi d'une discussion sur les limites de la méthode et de la façon dont on peut envisager de les dépasser.

L'Actualité Économique, Revue d'analyse économique, vol. 61 no. 4 décembre 1985

Mesure de la productivité : la méthode de Divisia

Pierre OUELLETTE
et
Pierre LASSERRE
C.R.D.E. et *Département de science économique, Université de Montréal*

Cet article constitue un survol de la littérature portant sur la mesure du progrès technique par la méthode de Divisia. Dans un premier temps, la méthode est exposée en posant a priori certaines hypothèses simplificatrices. Dans un deuxième temps, ces hypothèses sont mises de côté de façon à englober le cas des firmes en présence de rendements non unitaires, de facteurs quasi fixes et en l'absence de concurrence parfaite. Le tout est suivi d'une discussion sur les limites de la méthode et de la façon dont on peut envisager de les dépasser.

The measurement of productivity: the method of Divisia. — We survey and synthetize the literature on the measurement of technical progress by the method of Divisia. The approach is first presented under a number of crucial simplifying assumptions. Then we relax those assumptions to allow for non constant returns, the presence of quasi-fix factors of production, and the absence of perfect competition. This is followed by a discussion on the limits of the method and on some of the ways those limits be overcome.

1. INTRODUCTION

La productivité est un concept économique et technologique important. Son évolution est surveillée de près ; on s'inquiète de tout ralentissement dans sa progression et on essaie d'en déterminer les causes[1] ; on étudie également les différences intersectorielles, les effets de diverses réglementations ou encore l'influence des structures de marché.

Avant toute analyse du comportement de la productivité se pose le problème de sa mesure. Le présent article est consacré uniquement à cette

1. Pour un examen des causes du progrès technique, voir la revue de la littérature de Nelson (1981).

question. Diewert (1981) distingue quatre grandes méthodes de mesure de la productivité et du progrès technique. Celles-ci se divisent en deux groupes, selon la définition sous-jacente du progrès technique. Dans le premier groupe, on retrouve toutes les méthodes qui définissent le progrès technique comme le taux de changement d'un indice des outputs divisé par un indice des inputs. On appelle cette méthode l'approche de Divisia (1926) du progrès technique. Cette méthode a donné lieu à un très grand nombre d'applications, elle a évolué rapidement ces derniers temps, et elle semble encore susceptible d'enregistrer des perfectionnements intéressants. C'est pourquoi nous y consacrons l'essentiel de cet article. Les lecteurs intéressés à une étude plus exhaustive portant notamment sur les trois autres méthodes sont invités à se référer à Ouellette et Lasserre (1984).

L'autre groupe, que nous nous contenterons d'identifier et de situer rapidement est constitué de toutes les méthodes qui définissent le progrès technique comme étant le déplacement de la fonction de production (ou de la fonction de distance, ou de la fonction de coût). Il peut lui-même être subdivisé selon la méthode que l'on utilise pour mesurer le déplacement de la fonction considérée. On peut ainsi définir trois sous-groupes. Le premier consiste à associer une forme fonctionnelle à la fonction de production (ou à toute fonction caractérisant la technologie) et à estimer économétriquement les paramètres de la fonction. En incorporant une variable de temps dans la fonction, on détient, par le biais des paramètres associés au temps, une mesure du déplacement de la fonction. Cette mesure est appelée l'approche économétrique du progrès technique.

Le deuxième sous-groupe consiste, lui aussi, à associer une forme fonctionnelle à la technologie. Mais ici, on n'aura pas à estimer les paramètres de la fonction à l'aide de méthodes économétriques. Au contraire, dans ce cas, on se servira de la théorie de la production pour définir une mesure du progrès technique qui n'utilisera que des données sur les prix et quantités des facteurs et des outputs. Cette méthode est issue de ce qu'il est convenu d'appeler la théorie des nombres indices.

Le troisième sous-groupe ne nécessite en aucun temps qu'on associe une forme fonctionnelle spécifique à la technologie et encore moins qu'on en estime les paramètres. On se sert des données dont on dispose sur les prix et les quantités des facteurs et des outputs pour définir la fonction recherchée en recourant à la programmation linéaire. Cette méthode est appelée l'approche non paramétrique du progrès technique.

Comme nous l'avons indiqué, notre article porte sur un problème de mesure ; il ne s'agit pas d'une analyse économique de la productivité. Pourtant on notera tout au long de l'étude le rôle important qu'y joue la théorie économique. C'est que la productivité constitue une notion économique autant que technologique. En tant que telle, elle reflète la théorie à partir de laquelle elle est définie et, bien entendu, ne vaut que ce que vaut cette théorie ou ce que valent les hypothèses faites pour la rendre opérationnelle. En section deux, nous présentons la méthode de Divisia dans sa version la plus dépouillée, en essayant de mettre en lumière les hypothèses et arguments économiques qui la sous-tendent. Nous introduisons ensuite, en section trois, diverses complications ou particularités — rendements non constants, outputs multiples, présence de facteurs quasi fixes, tarification non marginale, progrès incorporé. Le cas échéant, nous montrons en quoi l'indice de Divisia de productivité totale des facteurs constitue alors une mesure biaisée du progrès technique. Ceci nous amène à conclure en section quatre, par une discussion sur les inconvénients de cette mesure et sur les moyens éventuels de les corriger.

2. L'INDICE DE DIVISIA DU PROGRÈS TECHNIQUE

On définit la productivité totale des facteurs (PTF) comme suit:

$$PTF = \frac{Y}{X} \tag{1}$$

où Y est l'indice de quantité des outputs;
X est l'indice de quantité des inputs.

Le progrès technique est donné par le taux de croissance de PTF

$$\frac{\dot{PTF}}{PTF} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{X}}{X} \tag{2}$$

où un point au-dessus d'une variable indique une dérivée par rapport au temps.

Solow (1957) a présenté une façon de calculer ces indices qui découle de la théorie de la production. Cette méthode est connue sous le nom d'indice de Divisia (1926) du progrès technique. Elle a été souvent utilisée, par la suite, à des fins empiriques (cf. Jorgenson et Griliches (1967); Christensen et Jorgenson (1969, 1970); Gollop et Jorgenson (1980)).

2.1. *Approche primale*

Dans Solow (1957) on retrouve l'approche primale à la mesure du progrès technique. Il considère une fonction de production homogène séparable en l'output et l'input[2]:

$$y(t) = F(x(t); t) \tag{3}$$

2. Cette formulation est compatible avec une représentation du progrès technique où celui-ci augmente la contribution de chaque facteur; l'évaluation de la part attribuable à chaque facteur pose certains problèmes discutés plus loin.

qui a les caractéristiques habituelles d'une fonction de production néoclassique. Dans cette fonction, $x(t) \equiv [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]$ est le vecteur des inputs au temps t.

La différentiation de cette équation par rapport au temps nous donne:

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i(t)} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i(t)} \frac{\dot{x}_i(t)}{y(t)} + \frac{1}{y(t)} \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{5}$$

On définit le progrès technique comme la portion de l'accroissement de l'output qui ne peut être attribuée aux variations dans les quantités d'inputs utilisées:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{6}$$

et on obtient:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} \frac{x_i(t)}{y(t)} \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}. \tag{7}$$

On pose

$$E_i(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} \frac{x_i(t)}{y(t)},$$

l'élasticité de l'output par rapport au facteur x_i au temps t.

Le taux de croissance de la productivité totale des facteurs est donc:

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} - \sum_{i=1}^{n} E_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)}. \tag{8}$$

À ce stade intervient un minimum de théorie économique. Si on considère un marché concurrentiel

$$\frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} = \frac{W_i(t)}{P(t)} \tag{9}$$

où $W_i(t)$ est le prix du facteur i;
$P(t)$ est le prix de l'output.

On obtient

$$E_i(t) = \frac{\partial y(t)}{\partial x_i(t)} \frac{x_i(t)}{y(t)} = \frac{W_i(t)}{P(t)} \frac{x_i(t)}{y(t)}. \tag{10}$$

Si les rendements sont constants et qu'il y a concurrence parfaite, $Py = C$, le coût total, si bien que $E_i = S_i$, la part du ième facteur dans les coûts. Il s'ensuit que

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} - \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} . \tag{11}$$

C'est cette formule qui constitue la définition habituelle de la notion de $\dot{PTF}/PTF$. Comme on le verra plus bas, elle ne reflète exactement le progrès technique que sous certaines hypothèses restrictives.

Si on intègre l'équation (11) dans l'intervalle de temps $[0, T]$, on obtient :

$$\frac{A(T)}{A(0)} = \frac{y(T)/y(0)}{exp \int_0^T \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} dt} . \tag{12}$$

$A(T)$ est l'indice de Divisia de la *PTF*, le dénominateur du terme de droite étant un indice de Divisia des inputs sur la période $[0, T]$. Sous forme logarithmique, ce dernier devient

$$\ln \left[\frac{X(T)}{X(0)} \right] = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} dt. \tag{13}$$

Notons que l'indice de Divisia des inputs (avec pondération sur la base des coûts) constitue l'indice normalement adopté pour X dans (2) (voir Denny *et al.*, 1981, et les références citées par ces auteurs). Pour des données discrètes, quand $S_i(t)$ ne varie pas du temps 0 au temps 1, la formule devient

$$\ln \left[\frac{X(1)}{X(0)} \right] = \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \ln \left[\frac{x_i(1)}{x_i(0)} \right] . \tag{14}$$

Törnqvist (1936) a proposé, dans le cas où $S_i(t)$ varie peu, l'approximation suivante :

$$S_i(1) = \frac{1}{2} \left[\frac{W_i(1)\, x_i(1)}{C(1)} + \frac{W_i(0)\, x_i(0)}{C(0)} \right] . \tag{15}$$

L'indice de productivité est donc construit en pratique en substituant (14) et (15) dans (12).

Jorgenson et Griliches (1967) ont généralisé cette approche au cas d'outputs multiples. Ils remplacent $\dot{y}(t)/y(t)$ par le taux de croissance d'un indice de Divisia de l'output

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{P_\ell(t)\, y_\ell(t)}{\left[\sum_{k=1}^{m} P_k(t)\, y_k(t)\right]} \frac{\dot{y}_\ell(t)}{y_\ell(t)} \tag{16}$$

où $P_\ell(t)$ est le prix de l'output ℓ au temps t. La démarche décrite ci-dessus donne alors (avec $A(0) = 1$).

$$A(1) = \frac{\prod_{\ell=1}^{m} \left[y_\ell^1 / y_\ell^0\right]^{1/2[P_\ell^1 y_\ell^1 / P^1 \cdot y^1 + P_\ell^0 y_\ell^0 / P^0 \cdot y^0]}}{\prod_{i=1}^{n} \left[x_i^1 / x_i^0\right]^{1/2[W_i^1 x_i^1 / W^1 \cdot x^1 + W_i^0 x_i^0 / W^0 \cdot x^0]}} \tag{17}$$

où les indices supérieurs représentent la date.

2.2. *Approche duale*

Le progrès technique peut aussi être évalué à partir d'une fonction de coût. Sous l'hypothèse de concurrence sur le marché des inputs et sous l'hypothèse de rendements constants, on considère alors une fonction de coût unitaire.

$$c(t) = G[W_1(t), W_2(t), \ldots W_n(t); t] \tag{18}$$

En suivant le même développement que précédemment, on exprime le progrès technique comme le déplacement de la fonction de coût non attribuable à des variations dans les prix des inputs

$$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \sum_{i=1}^{m} U_i(t) \frac{\dot{W}_i(t)}{W_i(t)} \tag{19}$$

où $\quad U_i(t) = \dfrac{\partial G(t)}{\partial W_i(t)} \dfrac{W_i(t)}{c(t)}$.

On sait d'après la lemme de Shephard que

$$x_i(t) = y(t) \frac{\partial G(t)}{\partial W_i(t)} \,. \tag{20}$$

Donc

$$U_i(t) = \frac{x_i(t)}{y(t)} \frac{W_i(t)}{c(t)} \tag{21}$$

représente la part du facteur i dans les coûts. Si en outre $c = P$, comme ce sera le cas s'il y a concurrence sur le marché de l'output, alors $U_i = S_i$ et

$$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{W}_i(t)}{W_i(t)} \,, \tag{22}$$

$$= \frac{\dot{P}(t)}{P(t)} - \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{W}_i(t)}{W_i(t)} \,. \tag{23}$$

Sous l'hypothèse de rendements constants, Otha (1974) a montré que $\dot{A}/A = -\dot{B}/B$. Ce résultat tient aussi dans le cas non concurrentiel. En intégrant, on obtient

$$\frac{B(T)}{B(0)} = \frac{P(T)/P(0)}{exp \int_0^T \sum_{i=1}^{n} S_i(t) \frac{\dot{W}_i(t)}{W_i(t)} dt} \,. \tag{24}$$

dont on peut obtenir une approximation discrète de Törnqvist comme dans le cas primal.

L'indice de Divisia du progrès technique est donc une mesure facile à construire à partir de données largement disponibles. Ceci s'entend sous les hypothèses simplificatrices adoptées dans la dérivation qui précède. Lorsqu'on relâche certaines de ces hypothèses, il faut modifier la formule et l'indice de Divisia peut alors différer de $P\dot{T}F/PTF$ tel que défini en (2), (11) et (12). Les sections qui suivent présentent quelques-unes des extensions possibles.

3. LES COMPLICATIONS ET PARTICULARITÉS

3.1. *Rendements d'échelle non constants*

Pour représenter l'impact des rendements d'échelle sur la mesure de la productivité (Denny *et al.*, 1981), nous nous servirons de la relation suivante qui exprime l'égalité du prix au coût marginal en concurrence parfaite[3]:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{W_i}{\partial C / \partial y} \tag{25}$$

où $C(y, W_1, ..., W_n, t)$ est la fonction de coût total.

On incorpore cette relation dans l'équation (7)

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i}{\partial C / \partial y \; y/C} \frac{x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i} \,. \tag{26}$$

Avec $\varepsilon_{cy} \equiv \frac{\partial C}{\partial y} \frac{y}{C}$, l'élasticité du coût par rapport à l'output, on a:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i} \tag{27}$$

3. Dans le reste de l'article, il ne sera plus indiqué explicitement que les variables dépendent du temps.

où $\sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i} \equiv \frac{\dot{X}}{X}$ est le taux de croissance de l'indice de Divisia des inputs pondérés sur la base des coûts.

Le progrès technique est donc

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{y}}{y} - \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{X}}{X} . \tag{28}$$

Cette formule diffère de $P\dot{T}F/PTF$ telle que définie en (11). Précisément,

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{X}}{X} + \frac{\dot{X}}{X} - \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{X}}{X} = \frac{P\dot{T}F}{PTF} - (\varepsilon_{cy}^{-1} - 1) \frac{\dot{X}}{X} \tag{29}$$

et

$$\frac{P\dot{T}F}{PTF} = \frac{\dot{A}}{A} + (\varepsilon_{cy}^{-1} - 1) \frac{\dot{X}}{X} . \tag{30}$$

Dans le cas de rendements constants, $\varepsilon_{cy} = 1$, et $\dot{A}/A = P\dot{T}F/PTF$, comme précédemment. Cependant, quand $\varepsilon_{cy} \neq 1$, la mesure du taux de croissance de la productivité totale des facteurs, $P\dot{T}F/PTF$, représente à la fois le déplacement de la fonction de production, $\dot{A}/A$ (représentant le progrès technique) et le déplacement sur la fonction de production, $(\varepsilon_{cy}^{-1} - 1)\, \dot{X}/X$.

Selon que l'on est en présence de rendements croissants ou décroissants, on aura $\varepsilon_{cy} < 1$ ou > 1, ce qui implique $(\varepsilon_{cy}^{-1} - 1) > 0$ ou < 0. Donc, $P\dot{T}F/PTF$ surestimera ou sous-estimera le progrès technique si on ne tient pas compte des rendements d'échelle. $P\dot{T}F/PTF$ mesure à la fois un aspect statique, les rendements d'échelle et un aspect dynamique, le progrès technique.

Par ailleurs, en différenciant la fonction de coût total par rapport au temps, on obtient

$$\frac{\dot{C}_i}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C}{\partial W_i} \frac{\dot{W}_i}{C} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\dot{y}}{C} + \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial t} . \tag{31}$$

Avec $\frac{\dot{B}}{B} = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial t}$ et $x_i = \frac{\partial C}{\partial W_i}$ en vertu du lemme de Shephard.

$$\frac{\dot{C}}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{W}_i}{W_i} + \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{B}}{B} . \tag{32}$$

En outre, par définition, le coût est $C = \sum_{i=1}^{n} W_i x_i$. Si on le différencie par rapport au temps, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{W}_i}{W_i} = \frac{\dot{C}}{C} - \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i} \tag{33}$$

Après substitution de ce résultat dans l'équation (32) on obtient

$$-\frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} - \sum_{i=1}^{n} \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i} \tag{34}$$

$$= \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{X}}{X} \tag{35}$$

Pour faire apparaître le biais introduit en mesurant le progrès technique par $P\dot{T}F/PTF$ au lieu de $-\dot{B}/B$, on écrit

$$-\frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{X}}{X}, \tag{36}$$

$$\frac{P\dot{T}F}{PTF} = -\frac{\dot{B}}{B} + (1 - \varepsilon_{cy}) \frac{\dot{y}}{\dot{y}} \tag{37}$$

Si on a des rendements constants, $\varepsilon_{cy} = 1, P\dot{T}F/PTF = -\dot{B}/B = \dot{A}/A$. Si $\varepsilon_{cy} \neq 1$, la relation entre $\dot{A}/A$ et $-\dot{B}/B$ est la suivante (Otha, 1974) :

$$-\frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy} \frac{\dot{A}}{A} \tag{38}$$

relation qui tient aussi dans le cas non concurrentiel.

3.2 *Outputs multiples et tarification non marginale*

Le cas de la fonction de coût avec plusieurs outputs est similaire. La fonction de coût s'écrit :

$$C = G(W_1, W_2, \ldots, W_n, y_1, y_2, \ldots, y_m; t) \tag{39}$$

En suivant les mêmes développements que précédemment (équations (31) à (35)), on arrive à :

$$-\frac{\dot{B}}{B} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} \frac{\dot{y}_j}{y_j} - \frac{\dot{X}}{X} \tag{40}$$

Pour relier $-\dot{B}/B$ à la mesure de la croissance de la productivité totale des facteurs nous introduisons deux mesures du taux de croissance de l'indice de Divisia de la croissance de l'output, $\dot{Y}^c/Y^c$ et $\dot{Y}^p/Y^p$.

$$\frac{\dot{Y}^p}{Y^p} = \sum_{j=1}^{m} \frac{P_j y_j}{R} \frac{y_j}{y_j} \tag{41}$$

où $R = \sum_{j=1}^{m} P_j y_j$ est le revenu total;

P_j est le prix de l'output j;

$\frac{\dot{Y}^p}{Y^p}$ est le taux de croissance de l'indice de Divisia de l'output basé sur les parts de revenus (c'est l'indice du taux de croissance des outputs utilisé habituellement dans le calcul de $P\dot{T}F/PTF$).

$$\frac{\dot{Y}^c}{Y^c} = \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right]^{-1} \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} \frac{\dot{y}_j}{y_j}\right] \tag{42}$$

où $\varepsilon_{cy_j} = \frac{\partial C}{\partial y_j} \frac{y_j}{C}$ est l'élasticité du coût par rapport à l'output j;

$\frac{\dot{Y}^c}{Y^c}$ est le taux de croissance de l'indice de Divisia de l'output basé sur les élasticités.

De par (42), on a

$$\left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} \frac{\dot{y}_j}{y_j} \tag{43}$$

et, après substitution dans (40),

$$\begin{aligned} \frac{\dot{B}}{B} &= \left[\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{X}}{X} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} + \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^p}{Y^p} + \frac{\dot{Y}^p}{Y^p} - \frac{\dot{X}}{X} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j} - 1\right] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} + \left[\frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^p}{Y^p}\right] + \frac{\dot{Y}^p}{Y^p} - \frac{\dot{X}}{X}. \end{aligned} \tag{44}$$

Puisque $\frac{P\dot{T}F}{PTF} = \frac{\dot{Y}^p}{Y^p} - \frac{\dot{X}}{X}$, il s'ensuit que

$$\frac{P\dot{T}F}{PTF} = -\frac{\dot{B}}{B} + \left[1 - \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} + \left[\frac{\dot{Y}^p}{Y^p} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}\right]. \tag{45}$$

Dans le cas primal, on obtient

$$\frac{P\dot{T}F}{PTF} = \frac{\dot{A}}{A} + \left[\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right)^{-1} - 1\right]\frac{\dot{X}}{X} + \left[\frac{\dot{Y}^p}{Y^p} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c}\right]. \tag{46}$$

De (45) et (46) on tire deux remarques. D'une part

$$-\frac{\dot{B}}{B} = \left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{cy_j}\right)\frac{\dot{A}}{A}, \tag{47}$$

ce qui prouve l'équivalence des mesures primale et duale de progrès technique lorsque les rendements sont constants, même en l'absence de tarification marginale des outputs. D'autre part, la mesure du taux de croissance de la productivité totale des facteurs capte

i) le déplacement de la courbe de coût, $-\dot{B}/B$ (ou de production, $\dot{A}/A$);

ii) le déplacement sur la courbe de coût, $(1 - \sum_j \varepsilon_{cy_j})\ \dot{Y}^c/Y^c$ (ou de production, $((\sum_j \varepsilon_{cy_j})^{-1} - 1)\ \dot{X}/X$);

iii) la tarification non marginale, $\dot{Y}^p/Y^p - \dot{Y}^c/Y^c$.

3.3 *Inputs quasi fixes*

Tant que l'entreprise se trouve à l'équilibre de long terme, l'introduction d'inputs quasi fixes ne modifie en rien les cas précédents. Cependant, quand l'entreprise s'écarte de cet équilibre, cela entraîne des variations dans l'utilisation de la capacité de production et dans l'utilisation des inputs quasi fixes. Ces inputs sont fixes à court terme et ne peuvent varier dans le temps que si on encourt des coûts d'ajustement. Cette distinction entre inputs variables et quasi fixes modifie l'analyse précédente : il faut utiliser une fonction de production (ou de coût) de court terme (Berndt et Fuss, 1981).

$$y = F(v_1, ..., v_j; f_1, ..., f_m; t) \tag{48}$$

où y est l'output (unique);
v_j est l'input variable j;
f_m est l'input quasi fixe m.

En différenciant par rapport au temps et en divisant par y, on obtient :

$$\frac{\dot{y}}{y} = \sum_j \frac{\partial y}{\partial v_j}\ \frac{v_j}{y}\ \frac{\dot{v}_j}{v_j} + \sum_m \frac{\partial y}{\partial f_m}\ \frac{f_m}{y}\ \frac{\dot{f}_m}{f_m} + \frac{1}{y}\ \frac{\partial F}{\partial t} \tag{49}$$

On a, comme conditions de maximisation des profits,

$$\frac{\partial y}{\partial v_j} = \frac{W_j}{\partial C/\partial y},\ j = 1, ..., J; \quad \frac{\partial y}{\partial f_m} = \frac{Z_m}{\partial C/\partial y},\ m = 1, ..., M$$

où W_j est le prix de l'input variable j;
Z_m est le prix implicite de l'input quasi fixe m (voir section 4 pour plus de détails sur Z_m); et

$C = \sum_j W_j v_j + \sum_m Z_m f_m$ est le coût total implicite.

En incorporant ces deux conditions dans l'équation (49), on obtient

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{A}}{A} + \varepsilon_{cy}^{-1} \sum_j \frac{W_j v_j}{C} \frac{\dot{v}_j}{v_j} + \varepsilon_{cy}^{-1} \sum_m \frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{f}_m}{f_m} . \tag{50}$$

On définit $\frac{\dot{V}}{V} \equiv \sum_j \frac{W_j v_j}{C} \frac{\dot{v}_j}{v_j}$ l'indice de Divisia des inputs variables pondérés sur la base des coûts implicites; et $\frac{\dot{F}}{F} \equiv \sum_m \frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{f}_m}{f_m}$, le taux de croissance de l'indice de Divisia des inputs quasi fixes pondérés sur la base des coûts implicites. Le progrès technique (primal) s'écrit alors

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{y}}{y} - \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{V}}{V} - \varepsilon_{cy}^{-1} \frac{\dot{F}}{F} . \tag{51}$$

Or, par définition (cf. (11)), $\frac{P\dot{T}F}{PTF} = \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}'}{F'}$ *où* $\frac{\dot{F}'}{F'} = \sum_m \frac{W_m f_m}{C'} \frac{\dot{f}_m}{f_m}$

est le taux de croissance de l'indice de Divisia des inputs quasi fixes pondérés sur la base des coûts aux prix du marché tandis que $C' = \sum_j W_j v_j + \sum_m W_m f_m$ est le coût total aux prix du marché, et W_m est le prix de l'input quasi fixe m sur le marché. Après substitution de cette expression dans (51) et quelques manipulations, on obtient la relation entre $\dot{A}/A$ et $P\dot{T}F/PTF$.

$$\frac{P\dot{T}F}{PTF} = \frac{\dot{A}}{A} + [\varepsilon_{cy}^{-1} - 1] \left[\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{F}'}{F'}\right] + \varepsilon_{cy}^{-1} \left[\frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}'}{F'}\right] \tag{52}$$

La mesure du taux de croissance de la productivité totale des facteurs capte donc:

i) le déplacement de la fonction de production, $\dot{A}/A$;

ii) le déplacement sur la fonction de production, $[\varepsilon_{cy}^{-1} - 1]$ $[\dot{V}/V + \dot{F}'/F']$;

iii) l'écart par rapport à l'équilibre de long terme, ε_{cy}^{-1} $[\dot{F}/F - \dot{F}'/F']$.

L'approche duale à cette mesure prend comme point de départ la fonction de coût total implicite de court terme:

$$C = H[W_1, ..., W_J; f_1, ..., f_M; y; t] + \sum_m^M Z_m f_m \tag{53}$$

En procédant comme auparavant, on obtient

$$\frac{\dot{C}}{C} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial W_j} \frac{W_j}{C} \frac{\dot{W}_j}{W_j} + \sum_m \frac{\partial H}{\partial f_m} \frac{f_m}{C} \frac{\dot{f}_m}{f_m} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{y}{C} \frac{\dot{y}}{y} + \frac{1}{C} \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$+ \sum_m \left[\frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{f}_m}{f_m} + \frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{Z}_m}{Z_m} \right]. \tag{54}$$

En vertu du lemme de Shephard modifié (Diewert, 1981),

$$\frac{\partial H}{\partial W_j} = v_j \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial f_m} = -Z_m$$

si bien que

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{B}}{B} + \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} + \sum_j \frac{W_j v_j}{C} \frac{\dot{W}_j}{W_j} + \sum_m \frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{Z}_m}{Z_m} \; . \tag{55}$$

Par définition, on a

$$C = \sum_j W_j v_j + \sum_m Z_m f_m \; . \tag{56}$$

En différenciant par rapport au temps et en divisant par C, on a

$$\frac{\dot{C}}{C} + \sum_j \frac{W_j v_j}{C} \frac{\dot{W}_j}{W_j} + \sum_j \frac{W_j v_j}{C} \frac{\dot{v}_j}{v_j} + \sum_m \frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{Z}_m}{Z_m} + \sum_m \frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{f}_m}{f_m} \tag{57}$$

et en éliminant $\dot{C}/C$ de (55) et (57) on obtient

$$-\frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} - \sum_j \frac{W_j v_j}{C} \frac{\dot{v}_j}{v_j} - \sum_m \frac{Z_m f_m}{C} \frac{\dot{f}_m}{f_m} \tag{58}$$

$$= \varepsilon_{cy} \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}}{F} \; . \tag{59}$$

Là encore, $-\frac{\dot{B}}{B} = \varepsilon_{cy} \frac{\dot{A}}{A}$, et l'on peut relier $-\dot{B}/B$ et $P\dot{T}F/PTF$ en procédant comme précédemment

$$\frac{P\dot{T}F}{PTF} = -\frac{\dot{B}}{B} + [1 - \varepsilon_{cy}] \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}'}{F'} \tag{60}$$

Ainsi $P\dot{T}F/PTF$ mesure:

i) le déplacement de la courbe de coût, $-\dot{B}/B$;

ii) le déplacement sur la courbe de coût, $[1 - \varepsilon_{cy}]\, \dot{y}/y$;

iii) l'écart par rapport à l'équilibre de long terme, $[\dot{F}/F - \dot{F}'/F']$.

3.4. *CAS GÉNÉRAL*

Dans la section 3.2, on a considéré le cas d'outputs multiples et de la tarification non marginale. On peut aussi combiner à ce cas la distinction entre le court terme (certains inputs sont quasi fixes) et le long terme (tous les inputs sont variables). Puisque les développements sont les mêmes, on se contentera de donner les principales étapes.

$$-\frac{\dot{B}}{B} = \sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell} \frac{\dot{y}_\ell}{y_\ell} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}}{F} \tag{61}$$

$$= [\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell}] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}}{F} \tag{62}$$

$$= \left[[\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell}] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} \right] + \left[\frac{\dot{Y}^c}{Y^c} - \frac{\dot{Y}^p}{Y^p} \right] + \left[\frac{\dot{Y}^p}{Y^p} - \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{F}'}{F'} \right] + \left[\frac{\dot{F}'}{F'} - \frac{\dot{F}}{F} \right] \tag{63}$$

$$\frac{P\dot{T}F}{PTF} = -\frac{\dot{B}}{B} + [1 - (\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell})] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} + \left[\frac{\dot{Y}^p}{Y^p} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} \right] + \left[\frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}'}{F'} \right] \tag{64}$$

Dans le cas primal, on a

$$\frac{P\dot{T}F}{PTF} = \frac{\dot{A}}{A} + [(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell})^{-1} - 1] \left[\frac{\dot{V}}{V} + \frac{\dot{F}'}{F'} \right] + \left[\frac{\dot{Y}^p}{Y^p} - \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} \right] + [\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell}]^{-1} \left[\frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}'}{F'} \right] \tag{65}$$

$P\dot{T}T/PTF$ mesure :

i) le déplacement de la fonction de coût, $-\dot{B}/B$, ou de production, $\dot{A}/A$;

ii) le déplacement de long de la fonction de coût,

$\left\{ -[(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell}) - 1] \frac{\dot{Y}^c}{Y^c} \right\}$, ou de production,

$\left\{ [(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell})^{-1} - 1] \; \dot{V}/V + \dot{F}'/F'] \right\}$;

iii) la tarification non marginale $\dot{Y}^p/Y^p - \dot{Y}^c/Y^c$;

iv) l'écart par rapport à l'équilibre de long terme $\dot{F}/F - \dot{F}'/F'$ pour la fonction de coût et $(\sum_{\ell} \varepsilon_{cy_\ell})^{-1} [\dot{F}/F - \dot{F}'/F']$ pour la fonction de production.

3.5. *Progrès technique spécifique à chaque facteur*

Jusqu'à présent, on a introduit le progrès technique dans la fonction de production (ou de coût) par le biais de la variable temps. Pour chaque niveau de productivité il existe une fonction de production et le progrès technique est une mesure du déplacement dans le temps de cette fonction. Un cas particulier que l'on retrouve fréquemment consiste à considérer le progrès comme une augmentation de l'efficience des facteurs de production. On appelle cette forme de progrès, le progrès technique spécifique. Seule la version la plus simple en sera considérée ici. On supposera qu'il y a concurrence, que tous les facteurs sont variables et que les rendements sont constants. Ceci permettra de mieux faire ressortir les caractéristiques et les problèmes propres à ce type de formulation. Le lecteur pourra aisément apporter les extensions qu'il désire, les sections précédentes s'appliquant sans difficulté.

La technologie est représentée par une fonction de production. La firme produit un output à partir de n facteurs variables. Les facteurs variables apparaissent dans la fonction de production en termes d'unités d'efficience, c'est-à-dire que les quantités d'inputs sont multipliées par un indice de productivité propre à chacun. On a donc

$$y = F(A_1X_1, A_2X_2, \ldots, A_nX_n) \tag{66}$$

que l'on dérive par rapport au temps pour obtenir, après quelques transformations

$$\frac{\dot{y}}{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \left[\frac{\dot{A}_i}{A_i} + \frac{\dot{x}_i}{x_i} \right] \tag{67}$$

En se servant des conditions de maximisation de profit et en normalisant les prix de telle sorte que le prix de l'output soit égal à l'unité, l'équation (67) devient

$$\frac{\dot{y}}{y} = \sum_i \frac{W_i x_i}{y} \frac{\dot{A}_i}{A_i} + \sum_i \frac{W_i x_i}{y} \frac{\dot{x}_i}{x_i} \tag{68}$$

Puisque l'on a supposé concurrence et rendements constants, le revenu total est donc égal au coût total, il s'ensuit que $y = C$ et

$$\sum_i \frac{W_i x_i}{y} \frac{\dot{x}_i}{x_i} = \sum_i \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{x}_i}{x_i} \equiv \frac{\dot{X}}{X}$$

$$\sum_i \frac{W_i x_i}{y} \frac{\dot{A}_i}{A_i} = \sum_i \frac{W_i x_i}{C} \frac{\dot{A}_i}{A_i} \equiv \frac{\dot{A}}{A}$$

où $\dot{X}/X$ est le taux de croissance de l'indice de Divisia des inputs pondérés sur la base des coûts et $\dot{A}/A$ est l'indice de Divisia du progrès technique spécifique. Ainsi l'équation (68) devient

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{y}}{y} - \frac{\dot{X}}{X} \tag{69}$$

et l'on remarque l'équivalence entre la mesure du progrès technique spécifique et la mesure du progrès technique définie à la section 2. En autant que seul l'indice de progrès technique global nous intéresse, les deux définitions du progrès technique sont identiques et cela demeure vrai dans les cas plus généraux abordés dans les sections 3.1 à 3.4. Cependant la répartition du progrès entre les divers facteurs pose certains problèmes. Cette répartition peut être désirable dans les comparaisons entre divers secteurs industriels n'utilisant pas les mêmes facteurs. Les secteurs miniers présentent à cet écart un cas particulièrement intéressant puisqu'ils utilisent un facteur, la ressource, qui se dégrade dans le temps : il n'est pas surprenant que les mines présentent une performance peu reluisante quant à la productivité en comparaison avec d'autres secteurs industriels (Lasserre et Ouellette, 1984).

Le progrès technique attribuable à chaque facteur ne peut cependant être obtenu à partir de la seule équation (69). Celle-ci présente en effet n inconnues, les $\dot{A}_i/A_i$, et ne peut être résolue sans informations supplémentaires. Sato (1970) et Sato et Calem (1983) proposent une méthode de calculer des $\dot{A}_i/A_i$ que nous présentons en section quatre.

4. DISCUSSION ET CONCLUSION

L'indice de Divisia de productivité totale des facteurs constitue, sous sa version communément acceptée (voir (2) et (11)), une mesure de progrès technique qui se construit aisément à partir de données largement disponibles sur les quantités de facteurs et les dépenses correspondantes. Comme nous l'avons montré, cette mesure n'est cependant exacte que sous les hypothèses de concurrence parfaite sur les marchés des inputs et des outputs, de rendements constants et en l'absence des déséquilibres associés à la présence de facteurs quasi fixes. En outre, si le progrès technique est d'un type qui augmente l'efficience de chaque facteur de production à un taux différent, cette mesure n'est capable de donner qu'une vision globale du processus, ce qui rend douteuses les comparaisons intersectorielles lorsque les firmes emploient des proportions différentes d'inputs, sans mentionner les inputs qui ne s'utilisent que dans certains secteurs particuliers.

Certaines tentatives ont été faites pour obtenir des mesures de progrès technique dont le champ de validité soit amélioré. Référons-nous aux formules (64) (ou (65)) ; $-\dot{B}/B$ (ou $\dot{A}/A$) y constitue l'indice de progrès technique exact tandis que $\dot{PTF}/PTF$ en est une approximation mesurable et que les autres termes identifient les sources de biais entre l'indice exact et sa mesure approximative. En examinant ces derniers, on peut identifier les informations nécessaires pour les mesurer: connaissance des rendements à l'échelle, des écarts entre les prix et les coûts marginaux et des écarts entre les prix implicites des facteurs quasi fixes et leurs prix de marché. Dans certains cas, on peut également désirer connaître la répartition des gains de productivité entre les divers facteurs.

Ce dernier problème est moins difficile qu'il n'y paraît à première vue, l'hypothèse de progrès spécifique à chaque facteur représentant déjà un apport d'information important. Sato (1970) et Sato et Calem (1983) définissent l'élasticité entre $A_i x_i$ et $A_j x_j$ (section 3.5) comme suit

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial(A_i x_i / A_j x_j)}{\partial(F_j / F_i)} \; \frac{F_j / F_i}{A_i x_i / A_j x_j} \,, \tag{70}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\dot{A}_i/A_i - \dot{A}_j/A_j + \dot{x}_i/x_i - \dot{x}_j/x_j}{\dot{A}_i/A_i - \dot{A}_j/A_j + \dot{W}_j/W_j - \dot{W}_j/W_i} \tag{71}$$

où $\quad F_i = \partial F / \partial A_i x_i$.

Puisque sous nos hypothèses le revenu total est égal au coût total, alors

$$\frac{\dot{y}}{y} = \sum_i \frac{W_i x_i}{y} \; \frac{\dot{x}_i}{x_i} + \sum_i \frac{W_i x_i}{y} \; \frac{\dot{W}_i}{W_i} \,. \tag{72}$$

En éliminant $\dot{y}/y$ des équations (68) et (72) on obtient, en posant $W_i x_i / C \equiv S_i$ et après quelques transformations

$$\frac{\dot{W}_\ell}{W_\ell} = \frac{\dot{A}_\ell}{A_\ell} + \sum_{i \neq \ell} \frac{S_i}{\sigma_\ell} \left[\frac{\dot{A}_i}{A_i} - \frac{\dot{W}_i}{W_i} \right] . \tag{73}$$

En se servant de (71) on peut réécrire (73) comme suit

$$\frac{\dot{W}_\ell}{W_\ell} = \frac{\dot{A}_\ell}{A_\ell} - \sum_{i \neq \ell} \frac{S_i}{\sigma_{i\ell}} \left[\frac{\dot{A}_\ell}{A_\ell} - \frac{\dot{A}_i}{A_i} + \frac{\dot{x}_\ell}{x_\ell} - \frac{\dot{x}_i}{x_i} \right] , \; \mathrm{i} = 1, \ldots, n-1. \tag{74}$$

Les équations (68) et (74) constituent un système de n équations indépendantes en $(n^2 + n)/2$ variables. Pour calculer $\dot{A}_i/A_i$ il faut donc connaître les σ_{ij}. Sato (1970) propose une méthode combinant l'estimation économétrique des σ_{ij} et le calcul des $\dot{A}_i/A_i$.

La méthode ci-dessus constitue un bon exemple de ce qu'implique le recours à l'économétrie pour obtenir les informations manquantes de l'expression (64) (ou (65)): comme le nombre d'observations est insuffisant pour l'estimation économétrique d'une forme générale de la technologie, on restreint a priori celle-ci à un cas particulier, ici en supposant le progrès spécifique aux facteurs. La question qui se pose est cependant de savoir si le recours à des méthodes économétriques pour compléter les informations nécessaires au calcul de $\dot{A}/A$ (ou $\dot{B}/B$) constitue en fait un complément à la méthode de Divisia ou bien une méthode complètement différente. En effet, si l'on estime économétriquement la fonction F (ou C), il n'est plus nécessaire de recourir à l'indice de PTF et à la formule (64) (ou (65)) pour définir la dérivée dans le temps de cette fonction.

On peut cependant recourir à des informations d'autres sources. Berndt et Fuss (1981) utilisent des données boursières pour mesurer le biais dans $\dot{PTF}/PTF$ résultant de la présence de facteurs quasi fixes. Plus précisément ils définissent le taux d'utilisation de la capacité de production d'une firme comme

$$u \equiv y/y^0$$

où y est la production;
y^0 est la capacité de production.

Si $u < 1$ (> 1), alors $y <$ ($>$) y^0 et la firme est à gauche (à droite) du minimum de la courbe de coût moyen à court terme (sous l'hypothèse de concurrence parfaite).

Considérons qu'il n'y a qu'un seul input quasi fixe, de prix W_k; définissons $q_k \equiv Z_k/W_k$, le ratio du prix implicite des services de l'input quasi fixe et du prix de marché des services de cet input. Si $u > 1$, la firme se trouve dans une zone où le coût moyen s'accroît avec la production (dû aux rendements décroissants). La firme abaisserait son coût moyen pour la période en augmentant d'une unité son stock de capital. Cependant il n'est pas certain qu'elle investisse, soit qu'elle s'attende à un renversement de situation, soit qu'une contrainte l'empêche de le faire. Dans ce dernier cas, la valeur implicite du capital, c'est-à-dire sa valeur pour la firme, sera supérieure au prix du marché du capital. On aura $q_k > 1$. Lorsque les prix anticipés sont constants, si $u < 1$, alors $q_k < 1$ car la firme n'a aucun intérêt à accroître son stock de capital; quand $u = 1$ alors $q_k = 1$.

Berndt et Fuss utilisent le q de Tobin pour mesurer q_k. Le q de Tobin reflète le prix de rachat du capital (en bourse) et non le coût d'utilisation du capital pour une période. Cependant Tobin-Brainard (1976) remarquent que lorsque le flux de revenu est constant, q_k peut être défini comme le ratio de l'efficacité marginale du capital et du taux d'escompte de la firme. Dans ce cas, $Z_k = q \cdot W_k$ et on obtient une mesure du prix implicite de l'input quasi fixe k. Le calcul de $\dot{A}/A$ (équation 64) et de $-\dot{B}/B$ (équation 65) est ainsi possible.

Un autre exemple d'utilisation d'informations nouvelles pour améliorer la formule (64) (ou (65)) est fourni par Lasserre et Ouellette (1984). Dans ce cas, on a affaire à un secteur extractif où les firmes utilisent un input, la ressource non renouvelable, qui n'intervient pas dans les autres secteurs. Nonobstant les biais qui entachent $\dot{PTF}/PTF$, le problème se pose alors de distinguer, dans la dérivée de la fonction de coût, ce qui traduit l'amélioration ou la dégradation de la performance des facteurs productibles (capital, main-d'oeuvre, énergie, matériaux et fournitures) de ce qui traduit la dégradation probable de la ressource utilisée. Ce type de problème se prête bien à une formulation où le progrès est spécifique aux facteurs. Sous cette hypothèse, les auteurs utilisent les variations de teneur comme approximation des changements d'efficience du facteur ressource.

On le voit, bien des progrès restent à faire pour rendre opérationnelle la méthode de Divisia de mesure de la productivité totale des facteurs dans les situations où les hypothèses sous lesquelles $\dot{PTF}/PTF$ constitue une mesure exacte ne sont pas satisfaites. Les quelques exemples décrits ici peuvent sembler des avances bien timides. Il faut cependant les situer dans le contexte général du problème de la mesure de la productivité. Jusqu'ici, malgré ses faiblesses, c'est la méthode de Divisia qui a permis les percées les plus utiles et il est probable, compte tenu de l'intensité des recherches qui se poursuivent dans cette voie, qu'elle subira d'autres améliorations intéressantes.

BIBLIOGRAPHIE

BERNDT, E.R. et M.A. FUSS (1981), « Productivity Measurement Using Capital Asset Valuation to Adjust for Variations in Utilizations », mimeo, University of Toronto, Toronto, Canada.

CHRISTENSEN, L.R. et D.W. JORGENSON (1969), « The Measurement of U.S. Real Capital Input, 1929-1967 », *Review of Income and Wealth*, Series 15, 14 (décembre), nº 4, pp. 293-320.

CHRISTENSEN, L.R. et D.W. JORGENSON (1970), « U.S. Real Product and Real Factor Input, 1929-1967 », *Review of Income and Wealth*, Series 16 (mars), pp. 19-50.

DENNY, M., M. FUSS et L. WAVERMAN (1981), « The Measurement and Interpretation of Total Factor Productivity in Regulated Industries, with an Application to Canadian Telecommunication », in J.G. COWING et R.E. STEVENSON éd., *Productivity Measurement in Regulated Industries*, Academic Press, New York.

DIEWERT, W.E. (1981), « The Theory of Total Factor Productivity Measurement in Regulated Industries », in T.G. COWING et R.E. STEVENSON éd., *Productivity Measurement in Regulated Industries*, Academic Press, New York.

DIVISIA, F. (1926), *L'indice monétaire et la théorie de la monnaie*, Paris, Société anonyme du Recueil Sirey.

GOLLOP, F.M. et D.W. JORGENSON (1980), « United States Productivity Growth by Industry, 1947-1973 », in J.W. KENDRICK et B.N. VACCARA, éd., *New Developments in Productivity Measurement and Analysis*, Studies in Income and Wealth, N.B.E.R., University of Chicago Press, Chicago, Illinois.

JORGENSON, D.W. et Z. GRILICHES (1976), « The Explanation of Productivity Change », *Review of Economic Studies*, 34 (juillet), pp. 249-283.

LASSERRE, P. et P. OUELLETTE (1984), « Mesure de la productivité: la théorie récente et son application au cas des mines », Communication présentée au 13e Colloque Augustin-Frigon, 8 et 9 mars 1984, École Polytechnique de Montréal.

NELSON, R.R. (1981), « Research on Productivity Growth and Productivity Differences: Dead Ends and New Departures », *Journal of Economic Literature*, 19 (septembre), pp. 1029-1064.

OTHA, M. (1974), « A Note on the Duality Between Production and Cost Functions: Rate of Return to Scale and Rate of Technical Progress », *Economic Studies Quarterly*, 25 (décembre), pp. 63-65.

OUELLETTE, P. et P. LASSERRE (1984), « Mesure du progrès technique: théories et méthodes », Cahier 8425, Département de science économique et C.R.D.E., Université de Montréal.

SATO, R. (1970), « The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Function », *International Economic Review*, (11), pp. 179-208.

SATO, R. et P. CALEM (1983), « Lie Group Methods and the Theory of Estimating Total Productivity », in A. DOGRAMACI, éd., *Developments in Econometrics Analysis of Productivity*, Boston: Kluwer, Nijhoff Publication.

SOLOW, R.M. (1957), « Technical Change and the Aggregate Production Function », *Review of Economics and Statistics*, 39 (août), pp. 312-320.

TOBIN, J. et W.C. BRAINARD (1976), « Asset Markets and the Cost of Capital », Yale University, Cowles Foundation for Research in Economics, Discussion Paper No. 427, mars, 26. Publié aussi dans BELA BALASSA et RICHARD NELSON, éd., *Economic Progress, Private Values and Public Policy*, Amsterdam, North Holland, 1977.

TÖRNQVIST, L. (1936), « The Bank of Finland's Consumption Price Index », *Bank of Finland Monthly Bulletin*, n° 10, pp. 1-8.